Herleitung: Gauß`sches Fehlerfortpflanzungsgesetz

Gegeben sei die folgende Funktion:

$f(x_1 + \Delta x_1, \dots, x_l + \Delta x_l, \dots, x_N + \Delta x_N)$ wobei $x_l = \{x_{i,l}\}$ mit $i = 1, \dots, n$

Standardabweichung von f:

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(f_i - \langle f \rangle)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(\Delta f_i)^2 \qquad (1)$$

Was ist Δf_i ?

Bilde totales Differential von f:

$$\Delta f_i = \sum_{l=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}\right)\Delta x_{i,l} \qquad (2)$$

wobei $\Delta x_{i,l} = x_{i,l} - \langle x_l \rangle$.

Einsetzen von (2) in (1):

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}\right)\Delta x_{i,l}\right)^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{N}\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\Delta x_{i,l}\,\Delta x_{i,k}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\Delta x_{i,k}\right)^2 + \sum_{\substack{l,k=1\\ l\neq k}}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\Delta x_{i,l}\Delta x_{i,k}\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 \underbrace{\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_{i,k}\right)}_{\sigma_k^2} + \sum_{\substack{l,k=1\\ l\neq k}}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\underbrace{\left(\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_{i,l}\Delta x_{i,k}\right)}_{\mathrm{cov}(x_k\,,\,x_l)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_k^2 + \sum_{\substack{l,k=1\\ l\neq k}}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_l}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)\mathrm{cov}(x_k, x_l)$$

Für nicht korrelierte Werte x_k, x_l gilt für die Kovarianz $\mathrm{cov}(x_k, x_l) = 0$ (siehe ÜB 5)!

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma_f^2 = \sum_{k=1}^{N}\left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2 \sigma_k^2} \qquad (3)$$

Gleichung (3) entspricht dem Gauß`schen Fehlerfortpflanzungsgesetz!!!